***Тема 9 Проверка гипотез***

***Статистической гипотезой*** называется предположение относительно параметров или вида распределения. Например, по выборке построили гистограмму и по виду гистограммы предполагаем, что случайная величина распределена по равномерному закону с такими-то параметрами. Далее нужно принять решение: противоречат ли экспериментальные данные высказанной гипотезе или нет. Процесс принятия решения называется проверкой статистической гипотезы, а алгоритм проверки – решающим правилом.

1. и альтернативную гипотезы.
2. Задать уровень значимости .
3. Выбрать статистику критерия для проверки гипотезы .
4. Найти плотность распределения статистики критерия, в предположении, что гипотеза верна.
5. Найти на числовой прямой критическую область из условия: вероятность попадания статистики при условии, что равна .
6. По выборке найти выборочное значение статистики
7. Принять решение: если то гипотезы отклоняется(принимается альтернативная гипотеза , в противном случае, когда гипотеза принимается.

Далее рассмотрим несколько важных для практики гипотез.

1. ***Гипотеза о математическом ожидании при известной дисперсии.***

Пусть выборка получена из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону. Выдвигается гипотеза о равенстве математического значения заданному числу

(1)

при альтернативной гипотезе

(2)

В качестве статистики критерия в этой задаче примем следующую статистику

. (3)

Эту статистику подробно изучили, если нулевая гипотеза (1) верна, то , Поэтому проверка гипотезы сводится к проверке неравенства

, (4)

где квантиль порядка стандартного нормального распределения. Если это неравенство выполняется, то нулевая гипотеза отвергается.

1. ***Гипотеза о математическом ожидании при неизвестной дисперсии.***

Постановка задачи такая же, как и в предыдущем пункте.

В качестве статистики критерия примем следующую статистику

. (5)

Если нулевая гипотеза (1) верна, то имеет распределение Стьюдента с степенью свободы. Поэтому проверка гипотезы сводится к проверке неравенства

, (6)

где - квантиль порядка для распределения Стьюдента с степенью свободы. Если это неравенство выполняется, то нулевая гипотеза отвергается.

***3.Гипотеза о дисперсии***

Пусть выборка получена из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону. Выдвигается гипотеза о равенстве дисперсии заданному числу

(7)

при альтернативной гипотезе

(8)

В качестве статистики критерия в этой задаче примем следующую статистику

. (9)

В предположении, что нулевая гипотеза верна эта статистика имеет распределение Пирсона с степенью свободы. Если выполняются неравенства

или , (10)

где - квантиль порядка , а - квантиль порядка для распределения Пирсона с степенью свободы, то нулевая гипотеза отвергается.

***4.Гипотеза о равенстве математических ожиданий при известных дисперсиях.***

Пусть даны две выборки и из нормальных генеральных совокупностей и , вообще говоря, с разными объемами. Выдвигается гипотеза о равенстве математических ожиданий (11)

при альтернативной гипотезе

(12)

В качестве статистики критерия в этой задаче примем статистику

. (13)

Из свойств выборочных средних следует, что . Поэтому, если

, (14)

где квантиль порядка стандартного нормального распределения, то нулевая гипотеза отвергается.

***5.Гипотеза о равенстве математических ожиданий при неизвестных дисперсиях.***

Как и впункте 4, две выборки и из нормальных генеральных совокупностей и . Теперь дисперсии равны, но неизвестны: . Проверяется гипотеза (11) при альтернативной гипотезе (12).

В качестве статистики критерия в этой задаче примем статистику

, (15)

где , величины , несмещенные оценки для заданных выборок, а .

Можно доказать, что если нулевая гипотеза верна, то имеет распределение Стьюдента с степенью свободы. Поэтому проверка гипотезы сводится к проверке неравенства

, (16)

где - квантиль порядка для распределения Стьюдента с степенями свободы. Если это неравенство выполняется, то нулевая гипотеза отвергается.

***6. Гипотеза согласия Пирсона***

***Постановка задачи.*** Дана выборка

. (17)

объема , из генеральной совокупности с неизвестным законом распределения или неизвестной функцией распределения . Требуется проверить нулевую гипотезу:

при альтернативной гипотезе

где функция распределения заданной случайной величины со всеми известными параметрами.

Для проверки этой гипотезы необходимо определить статистику критерия. Разобьем множество значений выборки на равных частичных интервала. Число обычно определяется по формуле Стерджеса

Для каждого частичного интервала найдем  - число элементов выборки, попавших на  -ый интервал. Найдем вероятности  попадания случайной величины с функцией распределения . И введем в рассмотрение статистику

. (18)

Эта статистика принято называть мерой расхождения. Имеет место

***Теорема1***. (Пирсона) Статистика  имеет распределение Пирсона  с степенями свободы

На основе теоремы 1 проверяется гипотеза. Алгоритм проверки заключается в следующем. Вычисляем значение статистики по формуле (1). Определить уровень значимости , например ,. По таблице квантилей определяем квантиль порядка  для распределения Пирсона с степенm. свободы. Обозначим указанный квантиль как . Наконец, проверяем неравенств

Если это неравенство выполняется, то нулевая гипотеза отвергается, закон распределения генеральной совокупности не соответствует заданному распределению.

***Проверка сложной гипотезы.*** Предположим, что нам у функции распределения не все параметры известны, пусть неизвестны параметров. Например, это может быть математическое ожидание или дисперсия. В этом случае применяется следующая теорема Пирсона.

***Теорема1***. (Пирсона) Статистика  имеет распределение Пирсона  с степенями свободы.